

# Parte 7: Redshift

Primo Galletti      Aldo Aluigi

31 Marzo 2004

Si vuole, qui, riprendere l'analisi sul redshift delle onde gravitazionali di elevata intensità<sup>1</sup>. Le ragioni che ci hanno indotto a rivederla sono le seguenti:

1. sono sopraggiunte, nel frattempo, altre onde gravitazionali (in particolare, nel 2001 e 2002);
2. è stata migliorata la precisione nella valutazione dell'intensità delle onde utilizzando anche l'ampiezza del "rimbalzo";
3. l'intensità delle prime onde registrate dal rivelatore (nel 1994) va utilizzata con cautela, in quanto il fotoresistore non era "formattato" e l'apparecchio non ancora ben allineato;
4. nel mese di Settembre 2002, è stata registrata una "forchetta" abbastanza "pulita", la quale è stata utilizzata come *onda di riferimento*.

Ma prima di riprendere l'analisi, è utile riportare alcune considerazioni relative alla propagazione delle onde gravitazionali.

## 1 Propagazione di un'onda gravitazionale

Nella **Figura 1** è riportata, in forma schematica, la propagazione di un'onda gravitazionale di elevata intensità prodotta dal collasso di un nucleo di un Quasar a Nucleo Multiplo (QNM).

Possiamo riassumere le caratteristiche di queste onde come segue.

1. *L'onda gravitazionale è un'onda di densità* (dello spazio "fisico") che si propaga con una *velocità inversamente proporzionale alla radice cubica della densità*. Ossia:

$$c_0 = c_\infty \left( \frac{\delta_\infty}{\delta_0} \right)^{1/3} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Si veda l'Appendice di **Un rivelatore di Onde Gravitazionali: Quasar a Nucleo Multiplo**.

dove con il pedice “0” si sono indicati i valori “locali”, mentre con il pedice “∞” quelli relativi allo spazio a “riposo” (ossia, in assenza di campi) <sup>2</sup>.

La (1) può essere scritta anche nel modo seguente:

$$\delta_0 c_0^3 = \delta_\infty c_\infty^3 = \text{costante} \quad (2)$$

2. *I corpi immersi in un campo gravitazionale variano le proprie dimensioni in proporzione diretta con la velocità della luce del luogo dove si trovano.*

Ad esempio, un corpo il cui volume a “riposo” è  $V_\infty$  immerso in un campo gravitazionale la cui velocità della luce è  $c_0$  subisce una diminuzione del suo volume di:

$$V_0 = V_\infty \frac{c_0^3}{c_\infty^3} \quad (3)$$

Utilizzando la (2) si ottiene:

$$\delta_0 V_0 = \delta_\infty V_\infty \equiv \text{massa di spazio} = \text{costante} \quad (4)$$

Pertanto, *la massa di spazio contenuta nel volume considerato non varia.* In altre parole, possiamo dire che *in un volume che si “adatta alla velocità della luce” la massa di spazio (e di materia!) ivi contenuta è sempre la stessa* <sup>3</sup>.

3. L'intensità  $I$  di un'onda gravitazionale è direttamente proporzionale alla variazione della velocità della luce <sup>4</sup>:

$$I \propto \delta_\infty c_\infty^3 \frac{c - c_0}{c_0} \quad (5)$$

per cui, *l'intensità di un'onda gravitazionale risulta direttamente proporzionale all'ampiezza  $A$ , in Volt, del segnale del rivelatore.*

---

<sup>2</sup>Si ricorda che per lo spazio “a riposo” si hanno i seguenti valori:

$$\delta_\infty = 3 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

$$c_\infty = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

pertanto, la costante (universale!) nella (2), *che ha le dimensioni di un flusso di energia*, assume il seguente valore:

$$\text{costante} \equiv \delta_\infty c_\infty^3 = 3 \cdot 10^{17} (3 \cdot 10^8)^3 = 8.1 \cdot 10^{42} \text{ W/m}^2$$

<sup>3</sup>Un *osservatore interno*, che si trova “immerso” nello stesso campo gravitazionale, *non si accorge che le dimensioni sono variate* così come non si accorge che sono variate sia la velocità della luce e la densità.

Il nostro rivelatore al CdS, invece, si comporta come un *osservatore esterno*!

<sup>4</sup>Possiamo dire che questa caratteristica è una diretta conseguenza della proprietà rappresentata dalla (2). In **Appendice** se ne riporta la dimostrazione.

4. *Lo spazio “fisico” non ha perdite di energia* e, quindi, l’energia (gravitazionale) di un’onda durante la sua propagazione rimane costante (anche per distanze molto grandi). Pertanto, l’energia  $\dot{U}$  trasportata per unità di tempo da un’onda risulta pari a:

$$\dot{U} = 4 \pi r^2 I \approx \text{costante} \quad (6)$$

## 2 Il redshift

La distanza  $r$  del luogo del collasso di un nucleo e la larghezza  $T$  dell’onda devono essere corretti per la presenza del *redshift*  $z$  dovuto all’espansione dell’Universo <sup>5</sup>. Più precisamente si ha:

$$(r)_{z=0} \equiv r_0 = \frac{r}{z+1} \quad (7)$$

$$(T)_{z=0} \equiv T_0 = \frac{T}{z+1} \quad (8)$$

Consideriamo due collassi (che denomineremo con i pedici “<sub>1</sub>” e “<sub>2</sub>”) avvenuti in punti dell’Universo differenti. Vedremo che, nell’ipotesi che i due eventi abbiano avuto *la stessa intensità energetica*, è possibile ricavare il redshift di *entrambi* a partire dal rapporto delle ampiezze  $A$  e della larghezza  $T$  delle rispettive “forchette”. Possiamo scrivere:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{A_2}{A_1} \equiv \frac{R_U^2 z_2^2 (z_1+1)^2 A_2}{R_U^2 z_1^2 (z_2+1)^2 A_1} = 1 \quad (9)$$

dove per le distanze  $r_1$  e  $r_2$  è stata utilizzata l’espressione (7) precedente. Se si indica con:

$$A_{ratio} = \frac{A_2}{A_1}$$

$$w_{ratio} = \frac{w_2}{w_1} \equiv \frac{z_2+1}{z_1+1}$$

si ottiene il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite  $z_1$  e  $z_2$ :

$$w_{ratio} = \frac{z_2}{z_1} \sqrt{A_{ratio}} \quad (10)$$

$$w_{ratio} = \frac{z_2+1}{z_1+1} \quad (11)$$

---

<sup>5</sup>Si veda a questo riguardo quanto riportato in **Materia e Universo: L’espansione dell’Universo**.

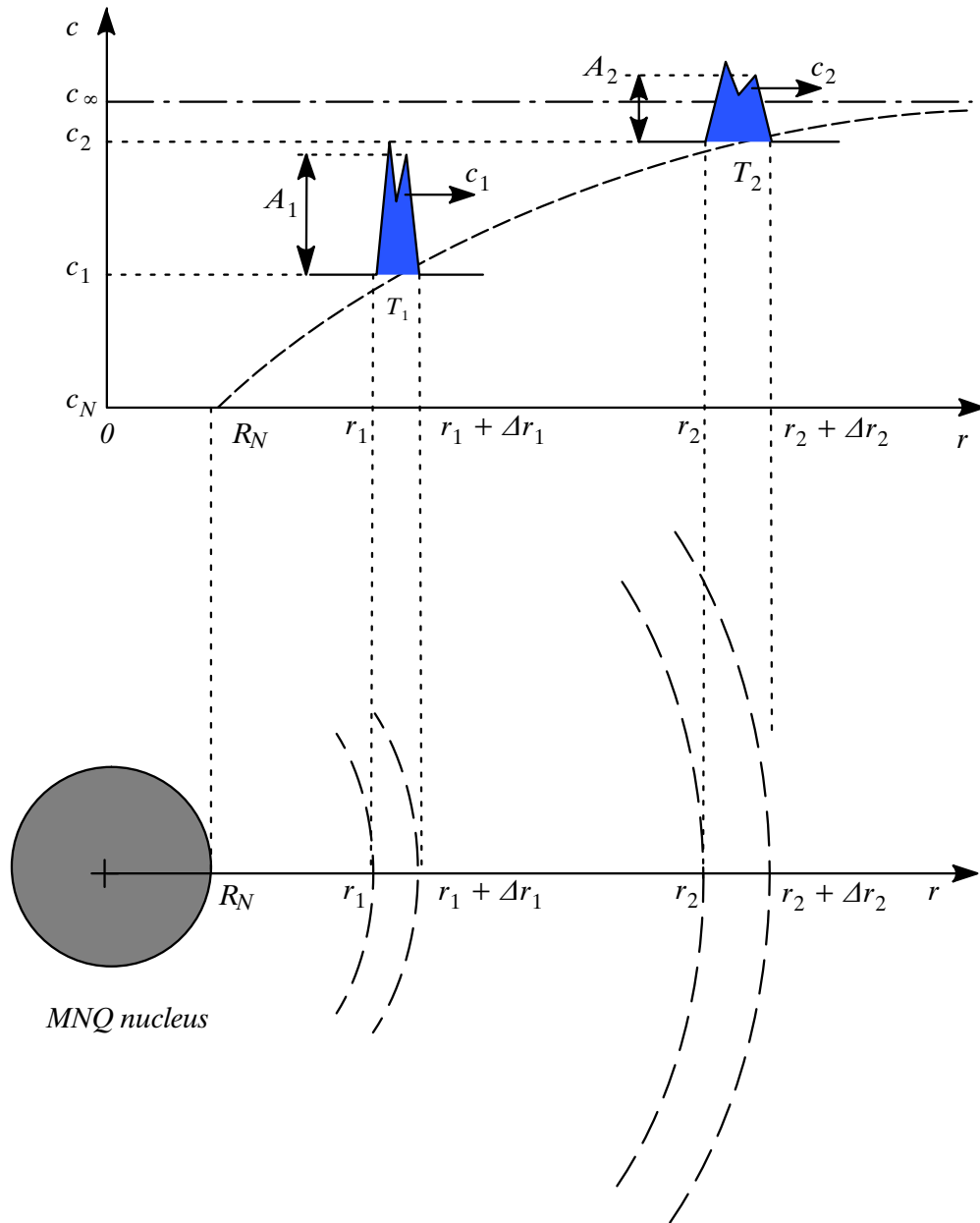


Figura 1: Propagazione di un'onda gravitazionale

dal quale è possibile ricavare  $z_1$  e  $z_2$ :

$$z_1 = \frac{\sqrt{A_{ratio}}}{w_{ratio1}} \frac{w_{ratio} - 1}{1 - \sqrt{A_{ratio}}} \quad (12)$$

$$z_2 = \frac{w_{ratio} - 1}{1 - \sqrt{A_{ratio}}} \quad (13)$$

Nel caso di più onde si può procedere come segue. Sostituendo la (12) e la (13) nella (10) si ottiene la seguente relazione tra l'ampiezza e l'allargamento dell'onda:

$$\frac{1}{\sqrt{A_{ratio}}} = \frac{1}{w_{ref} - 1} \left( w_{ref} - \frac{1}{w_{ratio}} \right) \quad (14)$$

dove si è posto:

$$A_{ratio} = \frac{A}{A_{ref}}$$

$$w_{ratio} = \frac{T}{T_{ref}}$$

con  $A_{ref}$  e  $w_{ref}$ , rispettivamente, ampiezza e allargamento dell'*onda di riferimento*.

Per ciascuna onda, possiamo riportare su di un grafico il valore di  $1/\sqrt{A_{ratio}}$  in funzione di  $1/w_{ratio}$ . Se i collassi hanno avuto tutti la stessa intensità energetica, *i punti così calcolati dovrebbero giacere su di una retta* avente pendenza negativa, la cui intersezione con l'asse delle ascisse consentirebbe di ottenere direttamente il valore  $w_{ref}$  dell'allargamento dell'onda di riferimento.

Una volta determinato  $w_{ref}$ , il redshift delle altre onde può essere calcolato mediante la seguente espressione:

$$z = w_{ratio} w_{ref} - 1 \quad (15)$$

e con esso possono essere ottenuti gli altri parametri. E precisamente:

- la distanza  $r_0$  del nucleo al momento del collasso:

$$r_0 = R_U \frac{z}{z + 1} \quad (16)$$

dove  $R_U$  è il *raggio dell'Universo visibile*, il quale è legato alla costante di Hubble  $H_0$  ed alla velocità della luce  $c$  dalla seguente relazione:

$$R_U = \frac{c}{H_0} \quad (17)$$

- il tempo  $\Delta t$  di percorrenza dell'onda prima di raggiungere il rivelatore:

$$\Delta t = t_H \ln(z + 1) \quad (18)$$

dove,  $t_H$  è il *tempo di Hubble*, definito come segue:

$$t_H = \frac{R_U}{c} \quad (19)$$

- la distanza  $r$  del luogo del collasso, nell'istante in cui l'onda raggiunge il rivelatore:

$$r = r_0 (z + 1) \quad (20)$$

## 2.1 Le onde selezionate

Il rapporto  $w_{ratio}$  tra gli allargamenti è anche uguale al rapporto delle distanze  $T$  tra le punte delle “forchette”, per cui è possibile determinarlo con molta precisione.

Il rapporto  $A_{ratio}$  tra le ampiezze, invece, risulta di più difficile determinazione a causa, soprattutto, della sovrapposizione delle varie onde che arrivano al rivelatore. Pertanto, è possibile determinarlo con sufficiente precisione soltanto se l'onda risulta isolata.

In questa nuova analisi, oltre alla ampiezza media  $\hat{A} = (A_1 + A_2)/2$  dei picchi della “forchetta”, è stata considerata anche l'ampiezza media  $\check{A} = (A_1 + A_2)/2$  del “rimbalzo” in quanto anch'essa *indicativa della intensità del collasso*. Inoltre, in questa valutazione, è stato tenuto in considerazione anche il rapporto  $\hat{A}/\check{A}$  che dovrebbe rimanere abbastanza costante.

Sono, qui di seguito, vengono brevemente descritte le onde prese in considerazione nella presente analisi, mentre nella **Tabella 1** sono riportati i relativi valori.

**Onde N. 1, 2 e 3** Fanno parte della serie di “forchette”, sia positive che negative, registrate dal rivelatore tra Maggio e Giugno 1994 (v. **Grafico 1994\_F1**).

*Queste onde vanno utilizzate con cautela in quanto la “formattazione” del rivelatore non era completata e l'apparecchio non ancora ben allineato.*

**Onda N. 4** Si tratta della grande “forchetta” registrata tra Settembre e Ottobre 1994 (v. **Grafico 1994\_F2**).

Anche per questa onda vale quanto detto per le onde precedenti.

**Onde N. 5 e 6** Si tratta delle due “forchette”, parzialmente sovrapposte, registrate tra Luglio e Settembre 1995 (v. **Grafico 1995\_F1**).

La parziale sovrapposizione di queste onde introduce qualche incertezza, soprattutto nella valutazione dell'ampiezza dei rimbalzi.

**Onde N. 7 e 8** Si tratta delle “forchette” registrate tra Luglio e Agosto 1998 (v. **Grafico 1998\_F1**).

Il fronte di salita della prima onda e il picco primario risultano disturbati da un improvviso abbassamento del segnale sottostante. Pertanto, come ampiezza del picco è più ragionevole assumere l'altezza del solo picco secondario  $\hat{A}_1 = 0.40 V$  e non considerare il picco primario.

Nella seconda onda, invece, è ben visibile soltanto il rimbalzo.

**Onda N. 9** Si tratta della “forchetta” registrata nel Settembre 1998 (v. **Grafico 1998\_F2**).

Questa onda risulta abbastanza “pulita”. Sono presenti soltanto alcune oscillazioni dovute, probabilmente, alle variazioni della temperatura del sensore.

**Onde N. 10 e 11** Si tratta di una “forchetta” negativa e di una positiva registrate tra Gennaio e Marzo 1999 (v. **Grafico 1999\_F1**).

Il picco secondario della “forchetta” negativa e quello primario di quella positiva risultano sovrapposti e, pertanto, non sono stati presi in considerazione.

**Onda N. 12** Si tratta della prima “forchetta” registrata nel Luglio 1999 (v. **Grafico 1999\_F2**).

L’ampiezza del picco secondario di questa onda non è stato considerato in quanto il fronte di discesa risulta molto disturbato.

**Onda N. 13** Si tratta della prima “forchetta” di elevata intensità registrata a partire dalla metà di Agosto 1999 (v. **Grafico 1999\_F4**).

Il fronte di salita risulta disturbato dal picco secondario del collasso precedente non ancora esaurito, mentre il fronte di discesa è parzialmente “tagliato” dal sopraggiungere della seconda onda il 24 Agosto. Sembra più ragionevole, pertanto, assumere per l’ampiezza di quest’onda il solo picco secondario ( $\hat{A}_1 = 0.80 V$ ) e non considerare affatto quello primario.

**Onda N. 14** Si tratta di una “forchetta” registrata in Agosto 2001 in cui è visibile soltanto il rimbalzo (v. **Grafico 2001\_F1**).

**Onda N. 15** Si tratta della “forchetta” registrata tra Settembre e Ottobre 2002 (v. **Grafico 2002\_F1**).

Non è visibile il fronte di salita dell’onda, mentre la parte rimanente sembra essere piuttosto “pulita”.

## 2.2 Onda di riferimento

Non potendo considerare la “forchetta” del Settembre/Ottobre 1994 (**Onda N. 4**) per i motivi poc’anzi esposti, le altre onde più “pulite” sono le seguenti:

- **Onda N. 8** del Settembre 1998
- **Onda N. 12** dell’Agosto 1999
- **Onda N. 14** del Settembre 2002

Tabella 1: Valori relativi alle onde selezionate.

<i>Wave</i> N.	<i>T</i> <i>days</i>	<i>A</i> <sub>1</sub> <i>Volts</i>	<i>A</i> <sub>2</sub> <i>Volts</i>	$\hat{A}$ <i>Volts</i>	<i>A</i> <sub>3</sub> <i>Volts</i>	<i>A</i> <sub>4</sub> <i>Volts</i>	$\check{A}$ <i>Volts</i>	$\hat{A}/\check{A}$ -
1	4.0	0.66	0.83	0.745	0.26	0.30	0.28	2.66
2	4.0	0.80	-	0.80	0.36	0.33	0.345	2.32
3	4.0	-	-	-	0.37	0.40	0.385	-
4	7.5	2.4	2.1	2.25	0.71	0.92	0.815	2.76
5	15.0	0.23	-	0.05	0.11	0.08	0.11	2.88
6	17.0	-	0.24	0.15	0.09	0.12	0.13	2.00
7	4.5	0.40	-	0.40	-	0.15	0.15	2.67
8	4.5	-	-	-	0.12	0.20	0.16	-
9	6.5	0.34	0.32	0.33	0.11	0.11	0.11	3.00
10	13.0	0.22	-	0.22	0.11	0.08	0.095	2.32
11	12.0	-	0.17	0.17	-	0.10	0.10	1.70
12	7.0	0.32	-	0.32	0.12	0.10	0.11	2.91
13	2.5	0.80	-	0.80	0.26	-	0.26	3.08
14	11.4	-	-	-	0.14	0.15	0.145	-
15	11.5	-	0.35	0.35	0.16	0.17	0.165	2.12

Nell'analisi, abbiamo provato tutte e tre le onde. Alla fine si è preferito prendere come riferimento l'onda del Settembre 2002. Ossia:

$$\hat{A}_{ref} = 0.35 \text{ Volt}$$

$$\check{A}_{ref} = 0.165 \text{ Volt}$$

$$T_{ref} = 11.5 \text{ giorni}$$

in quanto produceva una minore dispersione dei dati (intorno alla retta). Nella **Tabella 2** sono riportati i dati così ottenuti.

Le coppie di valori ( $1/w_{ratio}$ ,  $1/\sqrt{A_{ratio}}$ ) sono stati riportati sul grafico di **Figura 2**. Dal grafico si vede come, ad eccezione delle onde del 1994, tutte le altre si trovano, con buona approssimazione, su di una retta che interseca l'asse delle ascisse nel punto:

$$w \equiv w_{ref} = 9.5$$

Nella **Tabella 3** sono riportati i parametri relativi alle onde considerate così ottenuti <sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Per i calcoli è stato assunto il seguente valore per la *costante di Hubble*:

$$H_0 = 25 \text{ km/s per milione di anni - luce}$$

da cui, per il raggio dell'Universo visibile si ottiene il seguente valore:

$$R_U = \frac{c}{H_0} = \frac{300,000}{25} 10^6 = 12 \text{ miliardi di anni - luce}$$



Tabella 2: Dati per l'analisi del redshift.

<i>Wave</i> N.	$\hat{A}_{ratio}$	$\check{A}_{ratio}$	$w_{ratio}$	$1/\sqrt{\hat{A}_{ratio}}$	$1/\sqrt{\check{A}_{ratio}}$	$1/w_{ratio}$
1	2.139	1.697	0.35	0.69	0.77	2.88
2	2.286	2.091	0.35	0.66	0.69	2.88
3	-	2.333	0.35	-	0.65	2.88
4	6.429	4.939	0.65	0.39	0.45	1.53
5	0.657	0.485	1.30	1.23	1.44	0.77
6	0.686	0.727	1.48	1.21	1.17	0.68
7	1.143	0.909	0.39	0.94	1.05	2.56
8	-	0.970	0.39	-	1.02	2.56
9	0.943	0.667	0.57	1.03	1.22	1.77
10	0.629	0.576	1.13	1.26	1.32	0.88
11	0.486	0.606	1.04	1.43	1.28	0.96
12	0.914	0.667	0.61	1.05	1.22	1.64
13	2.286	1.576	0.22	0.66	0.80	4.60
14	-	0.879	0.99	-	1.07	1.01
15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabella 3: Parametri relativi alle onde selezionate.

<i>Wave</i> N.	$w$	$z$	$T_0$ <i>days</i>	$r_0$ $\times 10^9$ <i>a.l.</i>	$r$ $\times 10^9$ <i>a.l.</i>	$\Delta t$ $\times 10^9$ <i>anni</i>
1	3.3	2.3	1.2	8.4	27.7	14.3
2	3.3	2.3	1.2	8.4	27.7	14.3
3	3.3	2.3	1.2	8.4	27.7	14.3
4	6.2	5.2	1.2	10.1	62.3	21.9
5	12.4	11.4	1.2	11.0	136.7	30.2
6	14.0	13.0	1.2	11.1	156.5	31.7
7	3.7	2.7	1.2	8.8	32.6	15.8
8	3.7	2.7	1.2	8.8	32.6	15.8
9	5.4	4.4	1.2	9.8	52.4	20.2
10	10.7	9.7	1.2	10.9	116.9	28.5
11	9.9	8.9	1.2	10.8	107.0	27.5
12	5.8	4.8	1.2	9.9	57.4	21.1
13	2.1	1.1	1.2	6.2	12.8	8.7
14	9.4	8.4	1.2	10.7	101.0	26.9
15	9.5	8.5	1.2	10.7	102.0	27.0

La distanza *effettiva* tra le punte della “forchetta” risulta di 1.2 giorni. Il tempo di salita dell’onda, che é strettamente legato alle dimensioni del nucleo, é

dello stesso ordine di grandezza. Pertanto, il raggio *effettivo*  $R_N$  del nucleo risulta:

$$R_N \approx 1.2 \text{ giorni} - \text{luce}$$

dove la velocità della luce é quella “locale” che non conosciamo ancora <sup>7</sup>.

Il raggio *apparente* del nucleo, ossia quello *visto da un osservatore posto al di fuori del campo gravitazionale* risulta, invece:

$$(R_N)_\infty \approx 1.2 \cdot 86,400 \cdot 300,000 = 31 \cdot 10^9 \text{ km}$$

La massa di spazio che collassa con il nucleo, per la (2), risulta facilmente calcolabile:

$$\frac{4}{3} \pi (31 \cdot 10^{12})^3 \cdot 3 \cdot 10^{17} = 1.9 \cdot 10^{28} M_\odot$$

Come si vede, *si tratta di una massa di gran lunga superiore a quella della materia che costituisce l'Universo!*

### 3 Osservazioni

1. Con l'utilizzo anche dei “rimbalzi” la precisione dei calcoli del redshift è stata migliorata in modo significativo.
2. Rispetto all'analisi precedente, il redshift delle onde e, quindi, le distanze dei nuclei collassi sono aumentate. In particolare, i due collassi più vicini a noi fin'ora registrati (Agosto 1999) vengono ora posti ad una distanza praticamente doppia rispetto al valore precedente.
3. Risulta evidente, da questa analisi, come le onde gravitazionali possono percorrere distanze enormi senza perdite apprezzabili di energia e senza subire distorsioni significative. L'unico effetto subito é dovuto alla attenuazione/allargamento per il redshift.
4. È sorprendente notare come questo rivelatore riesca a “vedere” così bene anche onde aventi redshift molto elevati ( $z > 10$ ) e i cui eventi che le hanno generate sono avvenuti praticamente ai bordi dell'Universo visibile!

### 4 Conclusioni

L'analisi del redshift che é stata qui presentata considera il periodo di registrazione dal 1994 fino a Dicembre 2002, anche se le prime registrazioni fatte nel 1994 vanno considerate con cautela.

---

<sup>7</sup>Vedremo meglio in seguito, come dalle “dimensioni” dell'onda sia possibile risalire alla velocità della luce sulla superficie del nucleo. Si tratta di una velocità molto bassa, dell'ordine del metro al secondo!

Man mano che altre onde verranno registrate dal nostro rivelatore e nuovi collassi di QNM identificati aggiorneremo la presente analisi.

Forse non è superfluo ricordare che la presenza del redshift in queste onde rappresenta una delle prove più convincenti che ciò che registra il nostro rivelatore sono proprio *Onde Gravitazionali*.

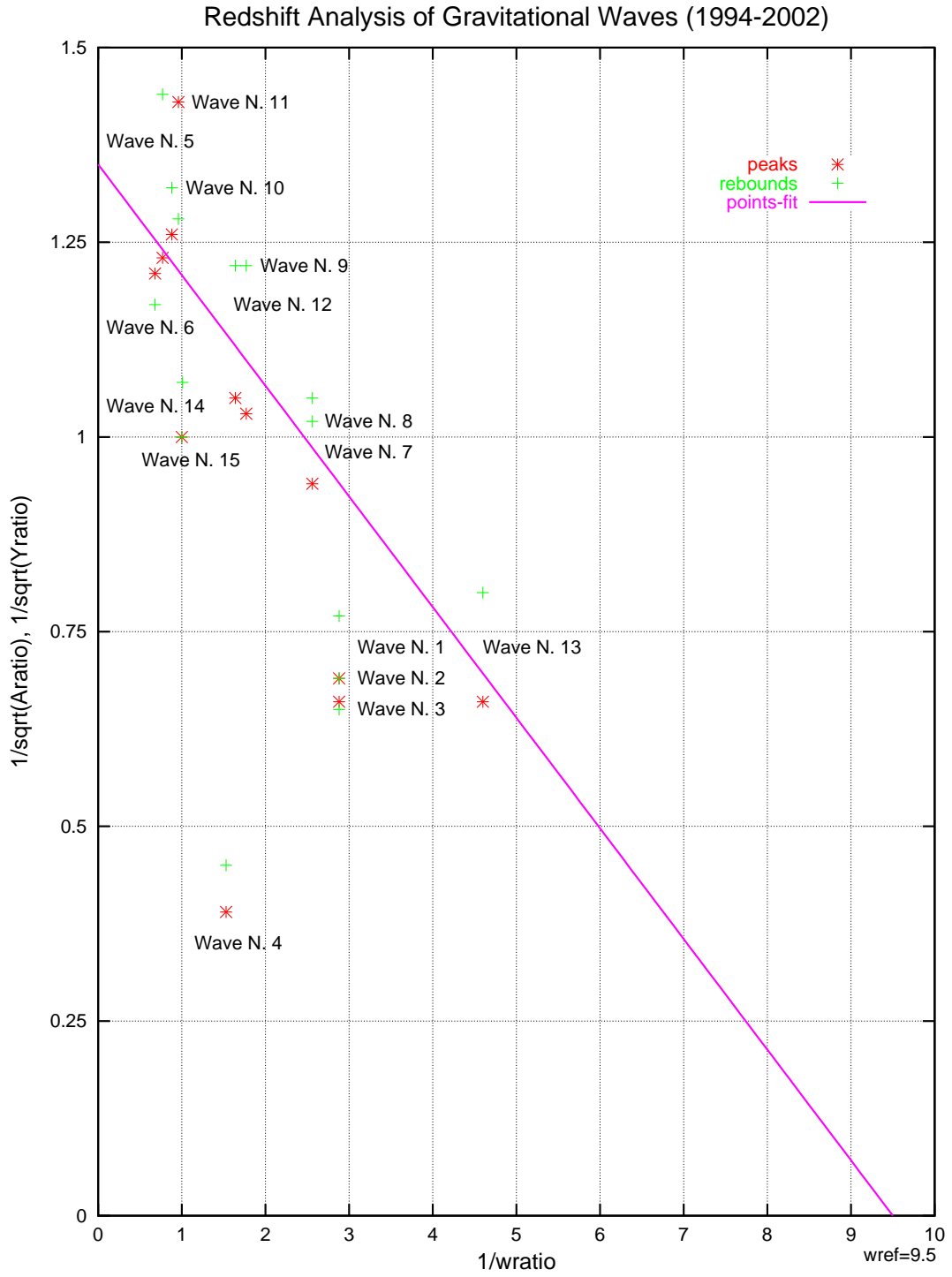


Figura 2: Analisi del redshift (rif. Onda N. 14)

# A APPENDICE

## A.1 Proprietà dello spazio “fisico”

Come è noto, la relazione tra la velocità di propagazione e le proprietà fisiche (pressione  $p$  e densità  $\delta$ ) di un mezzo è rappresentata dalla seguente espressione:

$$\frac{dp}{d\delta} = c^2 \quad (21)$$

Per un’onda gravitazionale, tenendo conto che la velocità di propagazione,  $c$ , è legata alla densità dello spazio dalla (1), si ottiene:

$$\frac{dp}{d\delta} = c_\infty^2 \left( \frac{\delta_\infty}{\delta} \right)^{2/3} \quad (22)$$

la quale, integrata, fornisce <sup>8</sup>:

$$p - p_0 = 3 \delta_\infty c_\infty^2 \left[ \left( \frac{\delta}{\delta_\infty} \right)^{1/3} - \left( \frac{\delta_0}{\delta_\infty} \right)^{1/3} \right] \quad (23)$$

La (23) può essere espressa anche in funzione della velocità,  $c$ . Infatti, utilizzando ancora la (1) si ha:

$$p - p_0 = 3 \delta_\infty c_\infty^3 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} \right) \equiv 3 \delta_0 c_0^2 \frac{c_0 - c}{c} \quad (24)$$

la quale mette in relazione, direttamente, l’*eccesso di pressione*,  $p - p_0$ , con la velocità di propagazione,  $c$ .

## A.2 Densità di energia di un’onda gravitazionale

L’energia gravitazionale altro non è che il *lavoro di compressione dello spazio “fisico”*. Pertanto, la densità di energia,  $u$ , associata all’onda gravitazionale, può essere espressa in modo *proporzionale all’eccesso di pressione* rispetto allo spazio indisturbato. Si ha:

$$u \propto p - p_0 \propto \delta_0 c_0^2 \frac{c_0 - c}{c} \quad (25)$$

---

<sup>8</sup>La (23) può essere considerata come una sorta di *equazione di stato dello spazio*, nella quale risulta mancante (per ora) la *temperatura*.

Vedremo, in seguito, come sia possibile considerare anche questa grandezza e mediante le misurazioni sulla *Radiazione Cosmica di Fondo* (CMB), sia possibile avere indicazioni molto precise sulla quantità di materia presente nell’Universo.

### A.3 Intensità di un'onda gravitazionale

L'intensità,  $I$ , di un'onda è legata alla sua densità di energia,  $u$ , dalla seguente relazione:

$$I = u c \tag{26}$$

Quindi, per un'onda gravitazionale, sostituendo la (25) nella (26) si ottiene:

$$I \propto \delta_0 c_0^2 (c_0 - c) \equiv \delta_0 c_0^3 \frac{c_0 - c}{c_0} = \delta_\infty c_\infty^3 \frac{c_0 - c}{c_0} \tag{27}$$