

# Espansione dell'Universo e redshift

Primo Galletti      Aldo Aluigi

Roma, 21 Settembre 2002

In un Universo in cui *avviene continuamente la nascita e la morte della materia*<sup>1</sup> l'ipotesi di una grande esplosione iniziale (*Big-Bang*), avvenuta circa 20 miliardi di anni fa, per spiegarne la sua espansione non é piú sostenibile<sup>2</sup>.

Si vuole, qui, proporre una diversa interpretazione della espansione dell'Universo piú in linea, anche, con l'esistenza di uno *spazio "fisico"*.

Vedremo come con questa nuova interpretazione il significato del *redshift*  $z$  risulta molto diverso dall'effetto Doppler, anche se la sua espressione é molto bene approssimata con la seguente<sup>3</sup>:

$$z + 1 = \frac{c}{c - v} \tag{1}$$

che, come é ben noto, coincide con una delle espressioni relative all'effetto Doppler "classico"<sup>4</sup>.

---

<sup>1</sup>Si vedano a questo proposito le **Parti 2 e 5** di *Un rivelatore di onde Gravitazionali*.

<sup>2</sup>Con il Big-Bang il redshift  $z$  viene interpretato in termini di effetto Doppler ("relativistico") della radiazione elettromagnetica emessa dagli oggetti celesti in allontanamento rispetto a noi. Piú precisamente si ha:

$$z + 1 = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

Si vuole fare presente soltanto come questa coincide, in pratica, con la (1) solo per piccole distanze ( $z \leq 0.5$ ) (v. **Figura 7**). D'altronde, la validitá della suddetta espressione é stata verificata soltanto attraverso l'analisi della radiazione elettromagnetica emessa da corpi celesti "relativamente" vicini a noi.

<sup>3</sup>Siano A ed B due corpi celesti che supponiamo allontanarsi tra di loro alla velocitá  $v$ . Se al tempo  $t = t_0$  il corpo A emette un segnale di durata  $T_A$  che puó essere ricevuto da B e indichiamo con  $T_B$  la durata del segnale registrato da quest'ultimo, risulta che:

$$T_A > T_B$$

Tale effetto viene comunemente chiamato *redshift* in quanto consiste in uno spostamento verso le basse frequenze (ossia verso il rosso nel caso di un segnale luminoso) dello spettro del segnale registrato da B e viene definito nel modo seguente:

$$z = \frac{T_B - T_A}{T_A}$$

<sup>4</sup>Nella **Appendice A.1** vengono riportate le espressioni relative all'effetto Doppler "classico".

Abbiamo già visto che la (1) funziona molto bene nell'analisi delle onde gravitazionali di elevata intensità ("forchette") prodotte, anche a notevole distanza da noi, dai collassi dei nuclei dei *Quasar a Nucleo Multiplo* (QNM) <sup>5</sup>.

## 1 Espansione dell'Universo

Si vuole ricavare l'espressione che avrebbe il redshift e le altre grandezze ad esso associate nell'ipotesi che *l'espansione dell'Universo sia dovuta alla continua interposizione (generazione) di nuovo spazio "fisico"*.

A tale scopo identifichiamo con  $\Gamma_0$  la quantità di spazio "fisico" generato nell'unità di tempo per unità di volume <sup>6</sup>:

$$\Gamma_0 = m^3/s \text{ di spazio per } m^3 \text{ di volume}$$

Siano A e B due corpi celesti e consideriamo una sfera con centro in A e con raggio pari a  $r_{AB}$  in modo che sulla sua superficie sia contenuto il corpo B (v. **Figura 1**).

La variazione del volume  $\Delta V_{AB}(t)$  nell'unità di tempo della sfera così costruita è direttamente proporzionale al volume  $V_{AB}(t)$  stesso. Più precisamente, per il volume  $V_{AB}$  è possibile scrivere la seguente relazione (differenziale):

$$\dot{V}_{AB} = \Gamma_0 V_{AB} \tag{2}$$

dove il punto rappresenta la derivata rispetto al tempo. La soluzione della (8), nell'ipotesi che  $\Gamma_0$  possa essere ritenuto costante, è data da:

$$V_{AB}(t) = V_0 e^{\Gamma_0 (t-t_0)} \tag{3}$$

dove  $V_0$  è il volume iniziale ( $t = t_0$ ). È facile verificare che per la distanza  $r_{AB}(t)$  vale, invece, la seguente relazione:

$$r_{AB}(t) = r_0 e^{\frac{\Gamma_0}{3} (t-t_0)} \tag{4}$$

dove  $r_0$  è la distanza iniziale tra A e B (ossia per  $t = t_0$ ). Derivando rispetto al tempo la (9) si ottiene la velocità di allontanamento  $v_{AB}$  tra i due corpi:

$$v_{AB} \equiv \dot{r}_{AB} = \frac{\Gamma_0}{3} r_{AB} \tag{5}$$

La (5) ci mostra che esiste una relazione di proporzionalità tra la velocità di allontanamento e la distanza.

Possiamo riassumere quanto sopra nel modo seguente: *nella misura in cui il rateo di produzione di spazio  $\Gamma_0$  possa essere considerato costante, i due corpi celesti A e B si allontanano tra di loro con una velocità che è direttamente proporzionale alla loro distanza.*

---

<sup>5</sup>Si veda l'**Appendice A.1** della **Parte 2** di *Un rivelatore di Onde Gravitazionali*.

<sup>6</sup>Non ci occuperemo, per ora, di come possa essere generato un tale mezzo.

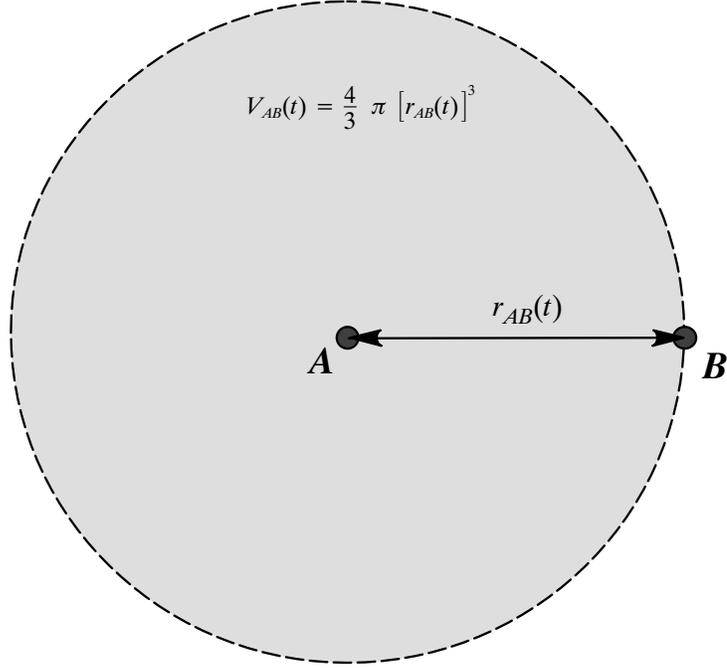


Figura 1: Allontanamento tra A e B per effetto dell'espansione

Dal confronto della (5) con la legge di Hubble:

$$v = H_0 r \quad (6)$$

si ottiene la seguente relazione tra  $\Gamma_0$  e la costante di Hubble  $H_0$ <sup>7</sup>:

$$\Gamma_0 = 3 H_0 \quad (7)$$

Per cui, la (3) e la (4) si possono scrivere, anche, nel seguente modo:

$$V_{AB}(t) = V_0 e^{3 H_0 (t-t_0)} \quad (8)$$

$$r_{AB}(t) = r_0 e^{H_0 (t-t_0)} \quad (9)$$

## 2 La propagazione dei segnali

Supponiamo che A emetta un segnale di tipo impulsivo che possa essere ricevuto da B. Sia  $r_0$  la distanza tra A e B al tempo  $t_0$  dell'emissione dell'impulso. Indichiamo, inoltre, con  $r_{pulse}(t)$  la distanza per  $t > t_0$  percorsa dall'impulso (v. **Figura 2**).

<sup>7</sup>Sul valore da attribuire alla costante di Hubble c'è, ancora oggi, molto disaccordo. Il suo valore sembra possa essere compreso tra 45 e 80 km/s per Mpc (ossia compreso tra 12.5 e 25 km/s per milione di anni-luce).

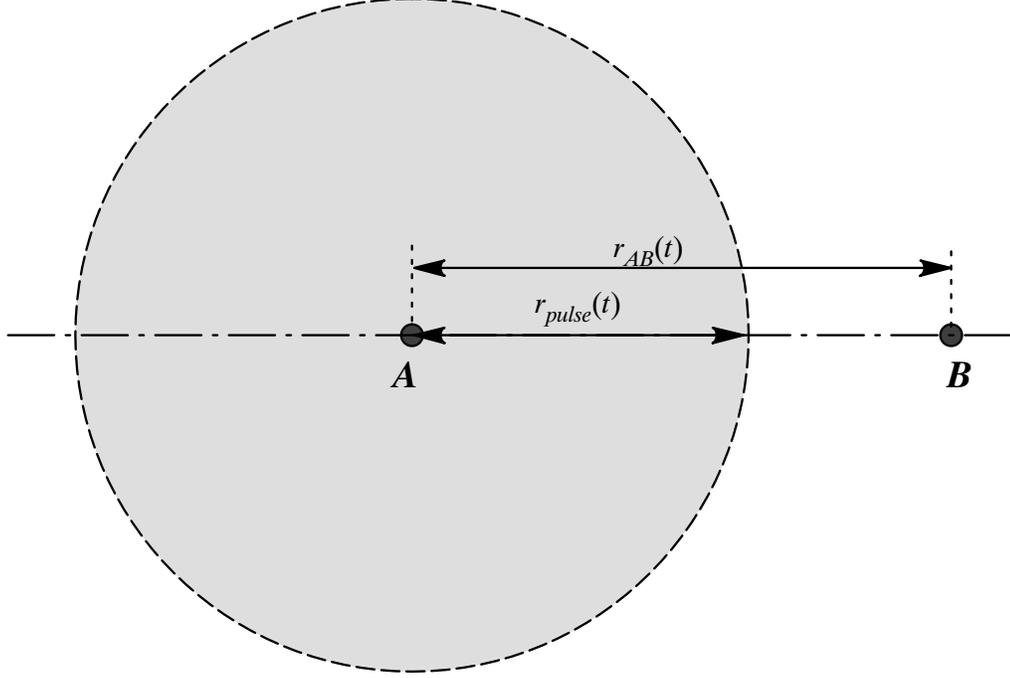


Figura 2: Propagazione dell'impulso emesso da A

Per  $r_{pulse}(t)$  possiamo scrivere la seguente relazione (differenziale):

$$\dot{r}_{pulse}(t) = c + v_{pulse}(t) \quad (10)$$

dove,  $c$  é velocitá di propagazione del segnale (rispetto al mezzo di comunicazione) e  $v_{pulse} \equiv \dot{r}_{pulse}$  é la velocitá di espansione della sfera di raggio  $r_{pulse}$ . Poiché per la (5) si ha:

$$v_{pulse}(t) = \frac{\Gamma_0}{3} r_{pulse}(t) \equiv H_0 r_{pulse}(t) \quad (11)$$

Sostituendo la (11) nella (10) si ottiene la seguente espressione (differenziale):

$$\frac{dr_{pulse}}{c + H_0 r_{pulse}} = dt \quad (12)$$

la quale integrata con la condizione iniziale:

$$r_{pulse}(t_0) = 0$$

fornisce:

$$\ln \frac{c + H_0 r_{pulse}}{c} = H_0 (t - t_0) \quad (13)$$

da cui si ottiene:

$$r_{pulse}(t) = \frac{c}{H_0} \left[ e^{H_0 (t-t_0)} - 1 \right] \quad (14)$$

É possibile stabilire il tempo  $\Delta t$  impiegato dall'impulso prima di essere ricevuto da B uguagliando la (14) con la (9). Si ha:

$$r_{pulse}(t) = \frac{c}{H_0} \left[ e^{H_0 (t-t_0)} - 1 \right] \quad (15)$$

dalla quale si ricava la seguente importante espressione:

$$\Delta t = \frac{1}{H_0} \ln \frac{c}{c - H_0 r_0} \equiv \frac{1}{H_0} \ln \frac{c}{c - v_0} \quad (16)$$

dove  $v_0$  é la velocità di allontanamento iniziale tra A e B (ossia al momento dell'emissione dell'impulso da parte di A):

$$v_0 = H_0 r_{AB}(t_0) = H_0 r_0 \quad (17)$$

La distanza tra A e B al momento della ricezione dell'impulso da parte di B si ricava sostituendo la (16) nella (9):

$$r_{AB}(\Delta t) = r_0 \frac{R_U}{R_U - r_0} \quad (18)$$

dove  $r_0$  é la distanza iniziale tra A e B. La distanza percorsa dall'impulso prima di essere ricevuto da B si ricava sostituendo la (16) nella (14):

$$r_{pulse}(\Delta t) = R_U \frac{r_0}{R_U - r_0} \quad (19)$$

### 3 Raggio dell'Universo visibile

Se si osservano la (16), (18) e (19) si nota che sono possibili tempi di percorrenza dell'impulso finiti solo se:

$$r_0 < r_{crit} \equiv \frac{c}{H_0} \quad (20)$$

ossia, se la sorgente A si trovava, al momento dell'emissione dell'impulso, ad una distanza dal ricevitore B inferiore alla distanza critica  $r_{crit}$ .

Pertanto, possiamo definire il *Raggio dell'Universo Visibile* con la quantità:

$$R_U = \frac{3c}{\Gamma_0} \equiv \frac{c}{H_0} \quad (21)$$

É facile verificare che  $R_U$  é la distanza tra A e B in cui la velocità di allontanamento  $v$  diventa uguale alla velocità di propagazione degli impulsi  $c$ . Infatti,

$$v = H_0 R_U = H_0 \frac{c}{H_0} = c \quad (22)$$

Per distanze tra A e B uguali o superiori a  $R_U$  gli impulsi emessi da A non riescono piú a raggiungere B (*ossia il corpo A non può piú essere "visto" da B*).

Con la definizione (20), la (16) può essere scritta anche nel modo seguente:

$$\Delta t = t_H \ln \frac{R_U}{R_U - r_0} \quad (23)$$

dove,

$$t_H \equiv \frac{1}{H_0} = \frac{3}{\Gamma_0} \quad (24)$$

rappresenta il *tempo caratteristico (tempo di Hubble)* del processo di espansione dell'Universo. Infatti, se nella (14) poniamo:

$$t - t_0 = t_H$$

si ottiene una distanza percorsa dall'impulso pari a  $(1 - e) R_U$  (ossia, circa il 63 % di  $R_U$ ) oppure, se si preferisce,  $t_H$  é il tempo necessario a raggiungere una velocità di allontanamento tra A e B pari a circa il 63 % di  $c$ .

Il tempo  $t_2$  di *raddoppio* della distanza iniziale ( $r_0$ ) tra A e B si ottiene uguagliando a  $2 r_0$  la (9):

$$2 r_0 = r_0 e^{H_0 t_2} \quad (25)$$

dalla quale si ricava:

$$t_2 = \frac{\ln 2}{H_0} = 0.693... t_H \quad (26)$$

$t_2$  é anche il tempo necessario affinché il volume iniziale ( $V_0$ ) diventi 8 volte piú grande.

## 4 Una rappresentazione geometrica

É possibile fornire una interpretazione geometrica molto semplice a quanto poc'anzi detto. Se poniamo:

$$w = e^{H_0 (t-t_0)} \quad (27)$$

sia la (9) che la (14) diventano funzioni lineari della nuova variabile  $w$  (v. **Figura 3**).

É facile verificare che l'intersezione tra le due rette rappresenta l'istante in cui l'impulso emesso da A viene ricevuto da B. Dalla intersezione tra le due rette si ottiene:

$$w = \frac{R_U}{R_U - r_0} \quad (28)$$

$$r = r_0 \frac{R_U}{R_U - r_0} \quad (29)$$

che, come si vedrá, insieme alla (21) rappresentano le relazioni fondamentali del processo di espansione dell'Universo.

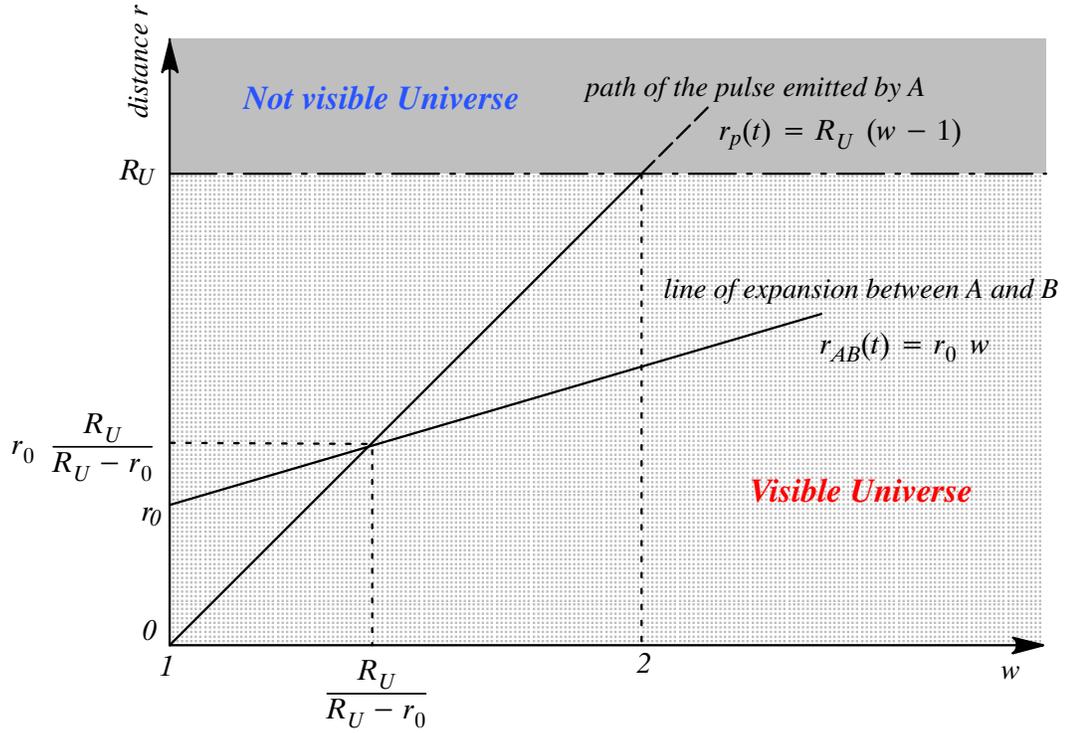


Figura 3: Rappresentazione geometrica dell'impulso emesso da A

## 5 Redshift e allargamento dell'onda

Supponiamo che al tempo  $t = t_0$  il corpo celeste A emetta l'impulso 1 e dopo un tempo  $T_A$  emetta l'impulso 2. Sia, invece,  $T_B$  l'intervallo di tempo che intercorre tra la ricezione dell'impulso 1 e l'impulso 2 da parte di B (v. **Figura 4**).

Si vuole ricavare la relazione esistente tra  $T_A$  e  $T_B$  nell'ambito delle ipotesi fatte ai punti precedenti. Siano  $r_1(t)$  ed  $r_2(t)$  le distanze da A percorse rispettivamente dall'impulso 1 e dall'impulso 2 (v. **Figura 5**).

Il tempo di percorrenza dell'impulso 1, in base alla (23) é dato da:

$$\Delta t_1 = \frac{1}{H_0} \ln \frac{R_U}{R_U - r_0} \quad (30)$$

dove  $r_0$  é la distanza iniziale tra A e B. Per l'impulso 2 si ha, invece:

$$\Delta t_2 = \frac{1}{H_0} \ln \frac{R_U}{R_U - (r_0 + \Delta r_0)} \quad (31)$$

dove  $\Delta r_0$  é l'incremento di distanza tra A e B durante l'emissione dei due impulsi. Utilizzando la (9) si ha che:

$$r_0 + \Delta r_0 = r_0 e^{H_0 T_A}$$

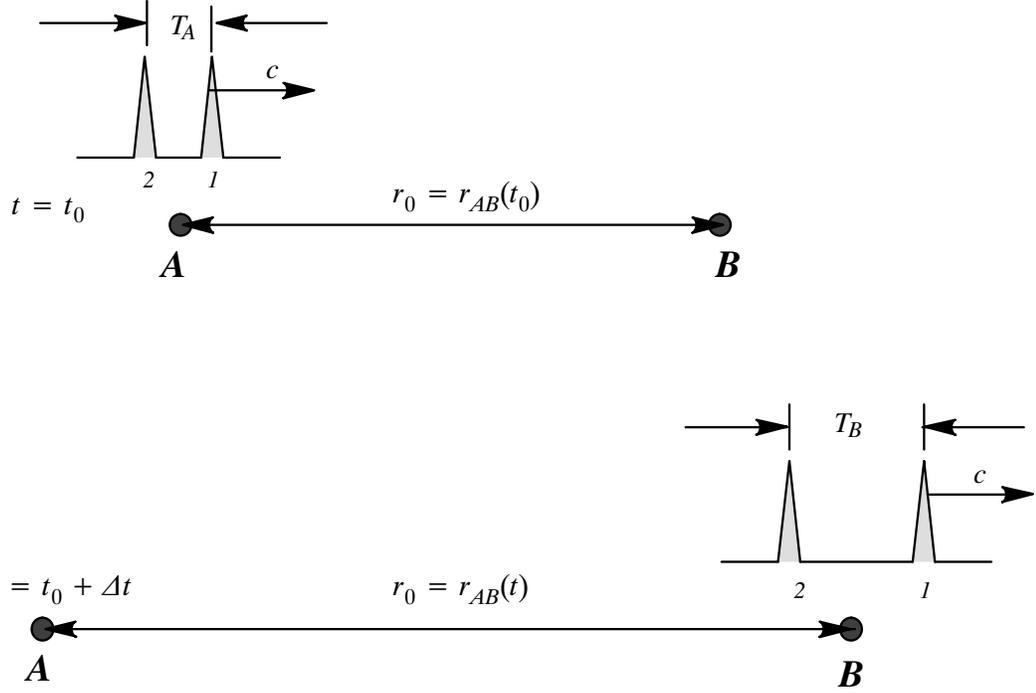


Figura 4: Propagazione della coppia di impulsi emessi da A

E poiché,

$$H_0 T_A \ll 1$$

si ottiene, con ottima approssimazione:

$$\Delta r_0 \approx r_0 H_0 T_A$$

Ora, il tempo  $T_B$  tra la ricezione dei due impulsi da parte di B é dato da:

$$T_B = T_A + \Delta t_2 - \Delta t_1 \quad (32)$$

nella quale sostituendovi la (30) e la (31) si ottiene:

$$T_B = T_A + \Delta t_2 - \Delta t_1 = T_A - \frac{1}{H_0} \ln \frac{R_U - (r_0 - \Delta r_0)}{R_U - r_0} \quad (33)$$

Inoltre, poiché,

$$\frac{1}{H_0} \ln \left( 1 - \frac{r_0}{R_U - r_0} H_0 T_A \right) \approx -T_A \frac{r_0}{R_U - r_0} \quad (34)$$

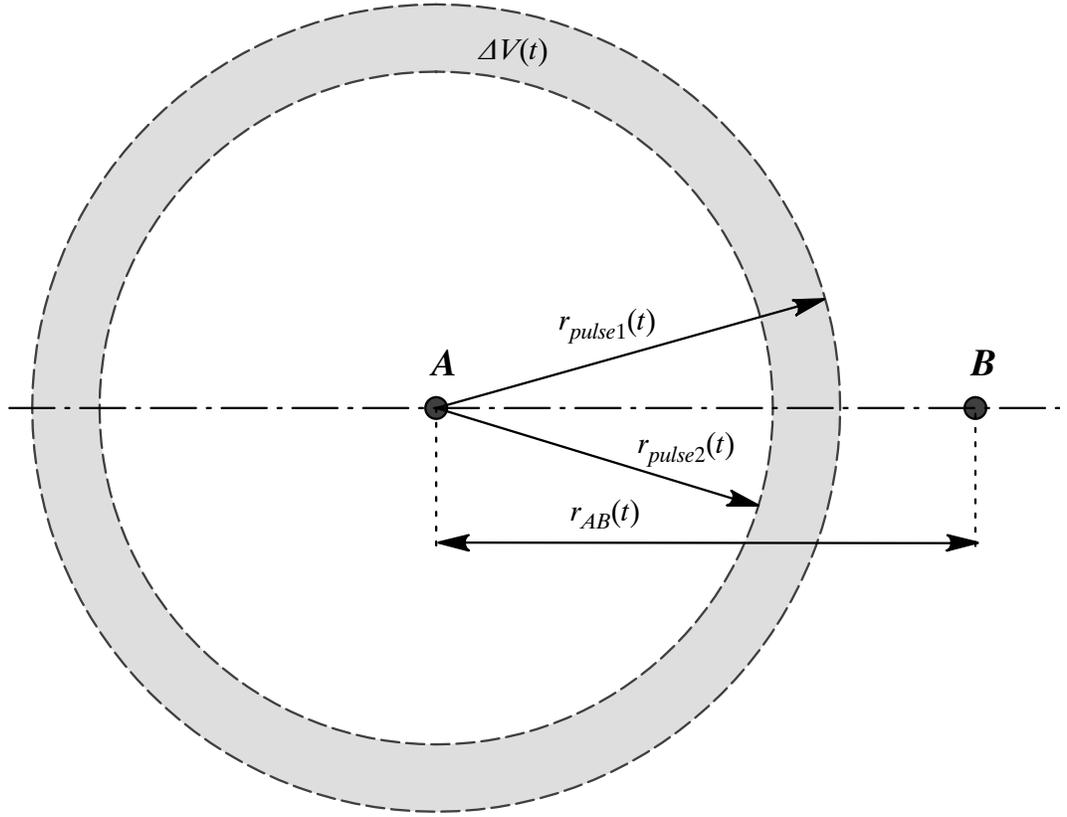


Figura 5: Allargamento della coppia di impulsi emessi da A

la (33) si semplifica:

$$T_B = T_A - T_A \frac{r_0}{R_U - r_0} = T_A \frac{R_U}{R_U - r_0} \equiv T_A \frac{c}{c - v_0} \quad (35)$$

La (35) rappresenta la relazione tra l'intervallo di tempo  $T_A$  di emissione degli impulsi da parte di A e l'intervallo di tempo  $T_B$  di ricezione degli stessi da parte di B. La **Figura 6** riporta la situazione che si ha in questo caso.

Introducendo il *redshift*  $z$ :

$$z = \frac{T_B - T_A}{T_A} \quad (36)$$

la (35) diventa:

$$T_B = T_A (z + 1) \quad (37)$$

dalla quale si ha:

$$z = \frac{v_0}{c - v_0} \equiv \frac{r_0}{R_U - r_0} \quad (38)$$

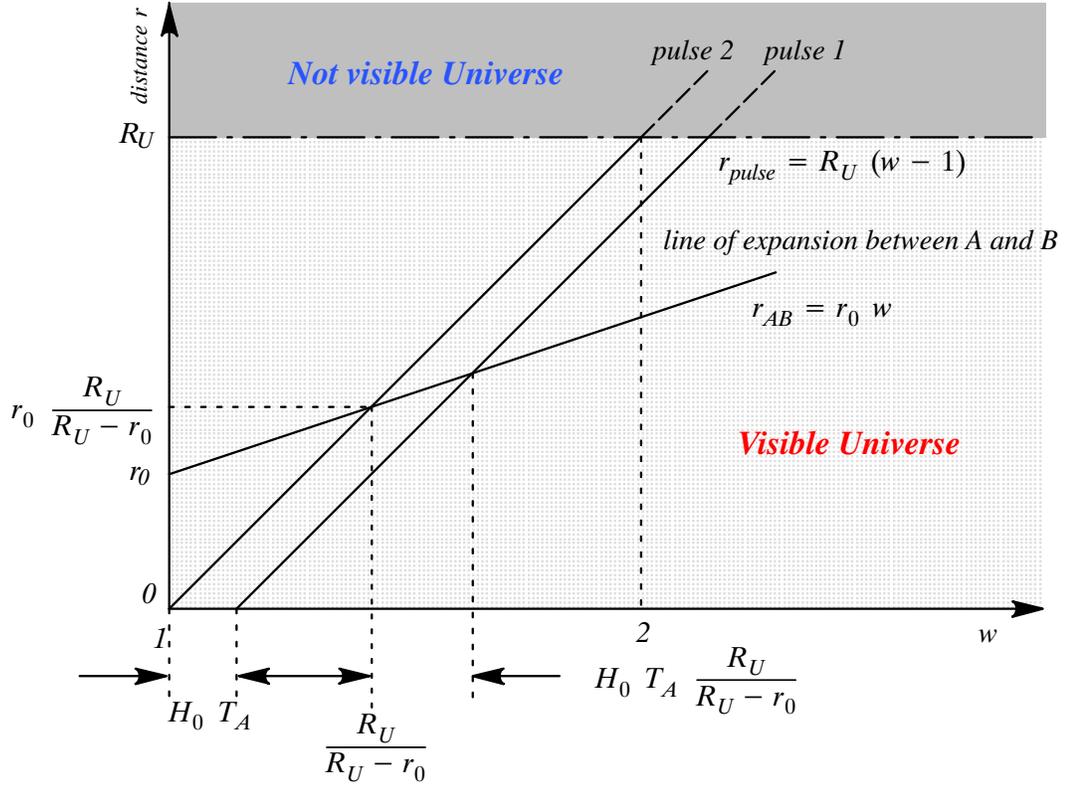


Figura 6: Rappresentazione geometrica della coppia di impulsi emessi da A

É facile verificare che la variabile  $w$  introdotta in precedenza altro non é che l'allargamento, dovuto al processo di espansione, tra i due impulsi emessi:

$$w = \frac{T_B}{T_A} \quad (39)$$

e quindi,

$$w = \frac{c}{c - v_0} \equiv \frac{R_U}{R_U - r_0} \quad (40)$$

Combinando la (38) con la (40) si ottiene la seguente relazione tra il redshift  $z$  e l'allargamento  $w$ :

$$w = z + 1 \quad (41)$$

Le precedenti relazioni (9) e (16) diventano:

$$r_{AB} = r_0 (z + 1) \quad (42)$$

$$\Delta t = \frac{1}{H_0} \ln(z + 1) \quad (43)$$

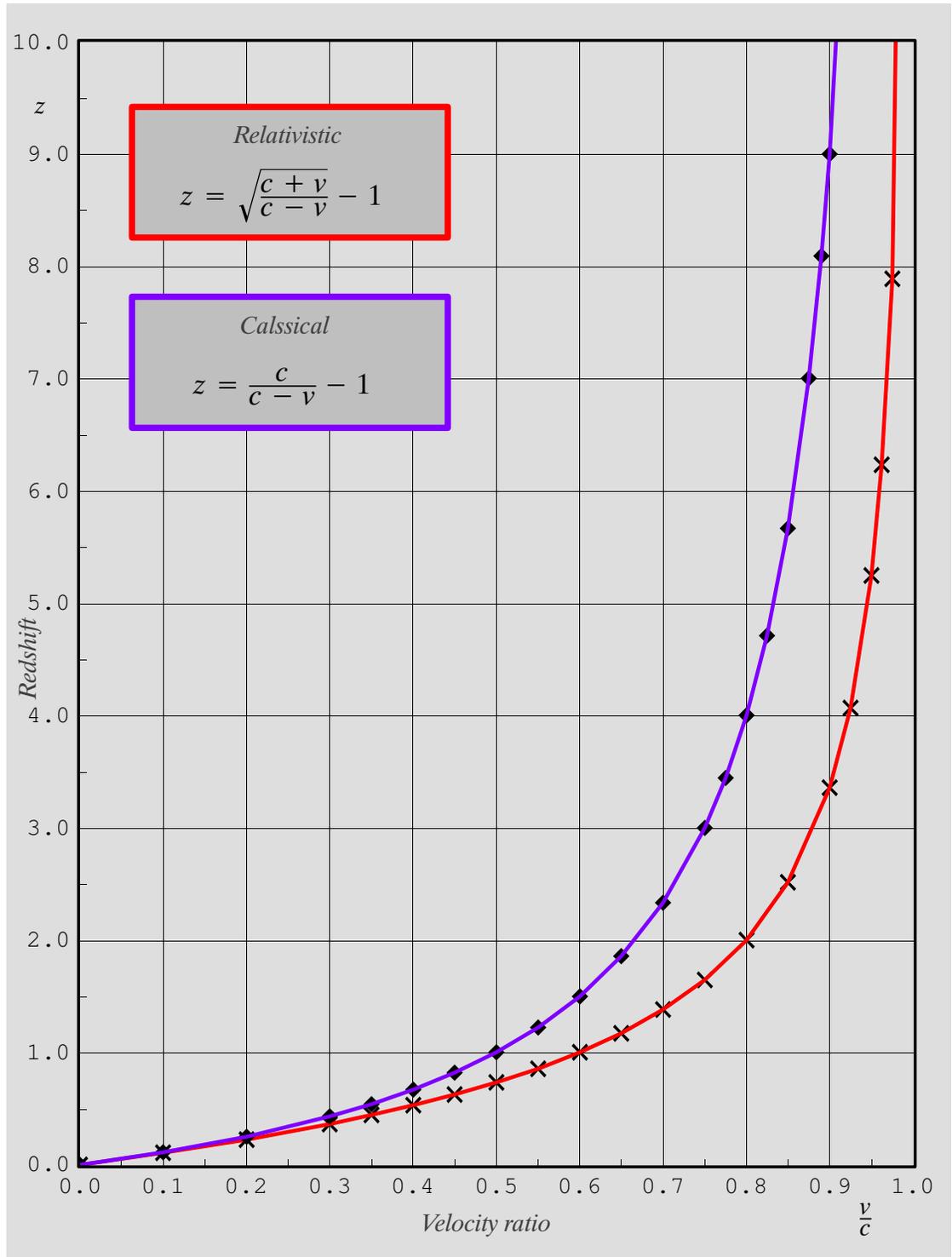


Figura 7: Differenze tra redshift "classico" e "relativistico"

Per il volume  $V_{AB}$  si ha la seguente relazione:

$$V_{AB} = V_{=} (z + 1)^3 \quad (44)$$

cosí come una relazione dello stesso tipo vale per il volume  $\Delta V$  contenuto tra i due impulsi.

Noti il redshift  $z$  (o l'allargamento  $w$ ) e la velocità di propagazione  $c$ , é possibile calcolare la velocità di allontanamento iniziale  $v_0$  dell'oggetto. Infatti, dalla (38) e dalla (40) si ricava:

$$v_0 = c \frac{z}{z + 1} \quad (45)$$

Poiché la velocità di allontanamento é data da:

$$v_0 = H_0 r_0 \quad (46)$$

Confrontando la (46) nella (45) si ottiene:

$$r_0 = R_U \frac{z}{z + 1} \quad (47)$$

Per cui se é noto il raggio dell'Universo visibile  $R_U$  é possibile calcolare la distanza da noi dell'oggetto in questione.

Infine, confrontando la (45) con la (47) si nota che la velocità e la distanza dell'oggetto hanno la stessa dipendenza dal redshift.

## 6 Discussione

Con questa *nuova interpretazione dell'espansione dell'Universo in termini di generazione continua di spazio "fisico"* valgono le seguenti osservazioni:

1. *Il redshift si distingue in modo sostanziale dall'effetto Doppler* (anche se l'espressione che si ottiene é, in pratica, la stessa!). Qui, sia A che B si trovano sempre in quiete rispetto al mezzo di comunicazione che li circonda.
2. *C'è perfetta simmetria tra la sorgente A ed il ricevitore B*. Ossia, l'espressione del redshift non cambia se é B ad emettere gli impulsi ed A a riceverli.
3. Esiste una *distanza critica* oltre la quale il fenomeno perde di significato fisico. A questa distanza é stato dato il nome di *Raggio dell'Universo visibile*.
4. Possiamo parlare di raggio dell'Universo visibile nella misura in cui  $\Gamma_0$  (e, quindi,  $H_0$ ) può essere considerata costante.
5. Sia la velocità di espansione tra i due corpi A e B che la loro distanza hanno la stessa dipendenza dal redshift  $z$ .
6.  $w$  rappresenta l'allargamento temporale dell'impulso il quale, abbiamo visto, risulta essere anche il suo allargamento spaziale.
7. L'allargamento  $w$  é un parametro piú adatto del redshift  $z$  a rappresentare il fenomeno dell'espansione dal punto di vista fisico.

Si vuole concludere accennando al problema della "calibrazione" della curva del redshift. Si tratta, nella sostanza, della determinazione del raggio dell'Universo visibile (e, quindi, della costante di Hubble), la cui conoscenza consente di ricavare, noto l'allargamento  $w$  (o il redshift  $z$ ), la distanza da noi dell'oggetto celeste che ha emesso l'impulso.

É ben noto che per poter calibrare questa curva occorre individuare una "*candela standard*", ossia una sorgente le cui caratteristiche energetiche siano note "a priori".

Affronteremo questo problema, in seguito, e proveremo ad utilizzare come "candela standard" il fenomeno del collasso dei nuclei dei QNM.

# A APPENDICE

## A.1 Effetto Doppler "classico"

Si abbia una sorgente  $S$  che emette impulsi con periodo proprio  $T_S$  ed un ricevitore  $R$  che riceve gli impulsi emessi da  $S$ . Si vuole determinare il periodo di ricezione degli impulsi  $T_R$  da parte di  $R$ . Tra  $S$  ed  $R$  esiste il mezzo la cui velocità di propagazione degli impulsi sia  $c$ .

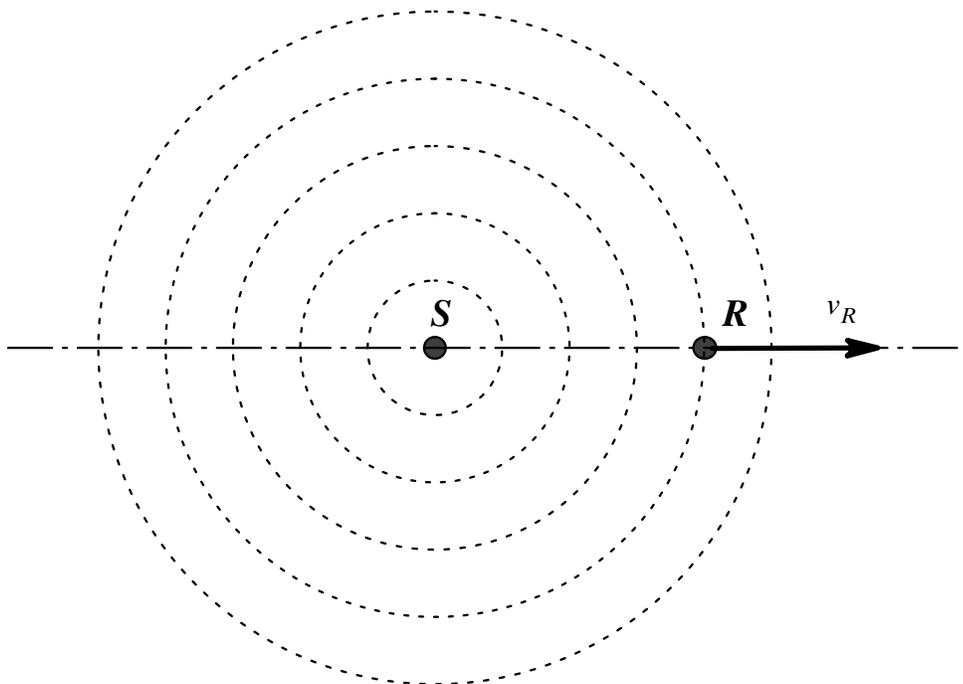


Figura 8: Sorgente (S) in quiete e ricevitore (R) in movimento

**Caso 1:** Sorgente (S) in quiete e ricevitore (R) in movimento.

Se  $R$  é in allontanamento con velocità  $v_R$ , il periodo  $T_R$  di ricezione degli impulsi si ricava dalla seguente espressione:

$$T_R = T_S + \frac{\Delta r_R}{c} \quad (48)$$

dove  $\Delta r_R$  é la distanza percorsa da  $R$  tra l'arrivo di due impulsi. Poiché,

$$\Delta r_R = v_R T_R \quad (49)$$

Sostituendo la (49) nella (48) e ricavando  $T_R$  si ottiene:

$$T_R = T_S \frac{c}{c - v_R} \quad (50)$$

Ossia, R riceve gli impulsi con un periodo superiore rispetto a quello di emissione (v. **Figura 8**).

Viceversa, se R é in avvicinamento é facile verificare che:

$$T_R = T_S \frac{c}{c + v_R} \quad (51)$$

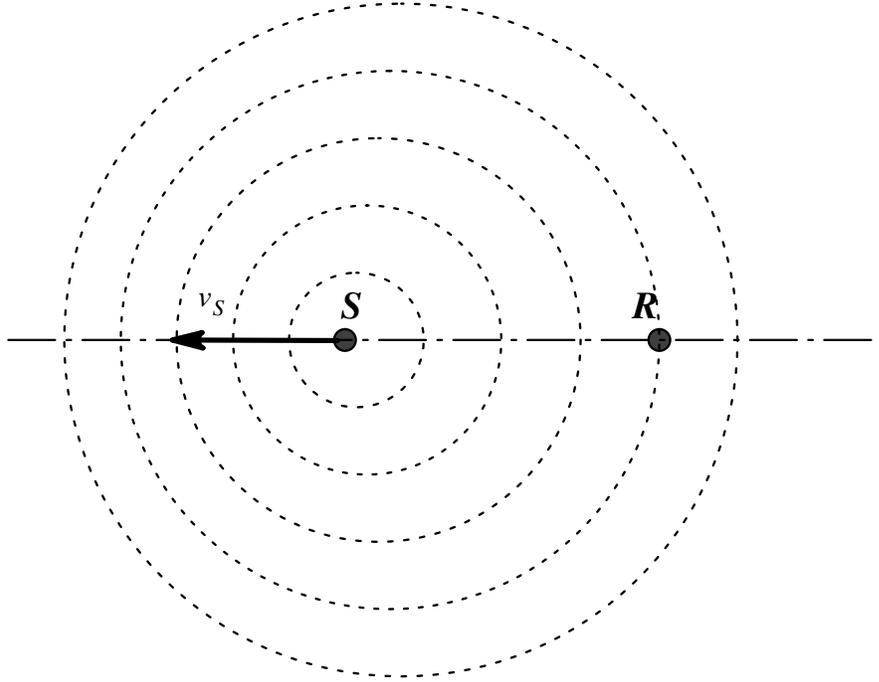


Figura 9: Ricevitore (R) in quiete e sorgente (S) in movimento

**Caso 2:** Sorgente in movimento e Ricevitore in quiete.

In questo caso il ricevitore R vede la sorgente S emettere gli impulsi con un periodo apparente dato dalla seguente espressione:

$$T_R = T_S + \frac{\Delta r_S}{c} \quad (52)$$

dove  $\Delta r_S$  é la distanza percorsa da S tra due impulsi emessi. Poiché anche in questo caso si ha:

$$\Delta r_S = v_S T_S \quad (53)$$

Sostituendo la (53) nella (52) si ottiene:

$$T_R = T_S \frac{c + v_S}{c} \quad (54)$$

La **Figura 9** mostra la situazione che si ha in questo caso.

Viceversa, se S é in avvicinamento si ha:

$$T_R \equiv T'_S = T_S \frac{c - v_S}{c} \quad (55)$$

Come si vede confrontando la (50) e (51) con la (54) e (55), l'effetto dovuto al movimento di R é *diverso* dall'effetto dovuto al movimento di S.